Ministerul Educației şi Cercetării
Serviciul Național de Evaluare şi Examinare

A 54-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa județeană şi a Municipiului Bucureşti

8 martie 2003

CLASA A XII-A

Subiectul 1

Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu elementul neutru e. Cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea că $x^n = e$, pentru orice $x \in G$, se numeşte *exponentul* grupului *G.*

a) Pentru orice număr prim $p, p \geq 3$, arătați că grupul multiplicativ G_p al matricelor de forma $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ cu $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbf{Z}_p$ este *necomutativ* şi are *exponentul* p.

b) Arătați că dacă $(G,\circ)$ şi $(H,\bullet)$ sunt grupuri finite cu *exponenții* respectiv m şi n, atunci grupul $(G \times H, *)$ cu operația dată de $(g,h) * (g',h') = (g \circ g', h \bullet h')$, pentru orice $(g,h),(g',h') \in G \times H$, are *exponent* cel mai mic multiplu comun al numerelor m şi n.

c) Deduceți că orice număr natural $n \geq 3$ este *exponentul* unui grup finit necomutativ.

Subiectul 2

Fie funcțiile continue $f, g : [0,1] \to (0,\infty)$, diferite, astfel încât $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$.

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin

$$x_n = \int_0^1 \frac{(f(x))^{n+1}}{(g(x))^n} dx .$$

a) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

b) Demonstrați că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton.

Subiectul 3

Fie K un corp finit astfel încât polinomul $X^2 - 5$ este ireductibil în $K[X]$. Arătați că:

a) $1 + 1 \neq 0$;

b) pentru orice $a \in K$, polinomul $X^5 + a$ este reductibil în $K[X]$.

(Notă: Admitem cunoscut faptul că orice corp finit este comutativ.)

Subiectul 4

Se consideră funcțiile continue $f : (0,\infty] \to \mathbf{R}$ şi $g : [0,1] \to \mathbf{R}$. Dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbf{R}$, arătați că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(x) g\left(\frac{x}{n}\right) \mathrm{d}x = L \int_0^1 g(x) \mathrm{d}x .$$

Timp de lucru: 3 ore